

ЭФФЕКТ ПРОДОЛЬНОЙ ДИФФУЗИИ В ЗАДНЕЙ КРОМКЕ ПЛОСКОГО АНЕМОМЕТРИЧЕСКОГО ДАТЧИКА

Ондржей Вайн^а и Нелля Джураевна Ковалевская^б

^а *Институт теоретических основ химических процессов АН ЧССР, Прага 6-Сухдол, Чехословакия и*

^б *Институт тепло- и массообмена им А. В. Лыкова АН БССР, Минск, СССР*

Поступило в редакцию 24^{ого} апреля 1986

Существующий анализ влияния продольной диффузии обобщен для любой кинематической конфигурации электродиффузионных или термоанемометрических датчиков напряжения трения.

Термоанемометрические и электродиффузионные методы определения мгновенного напряжения трения на поверхности обтекаемой стенки в настоящее время можно считать общеизвестным средством экспериментального исследования в гидродинамике¹⁻³. Однако, при исследовании неустановившегося или слишком медленного течения некоторые проблемы представляет выбор подходящей формы и масштаба датчика, нагреваемой пленки или поляризуемого электрода.

Слишком большой датчик обладает значительной инерционностью и может подвергаться выразительным вторичным эффектам (напр. свободная конвекция или омические потери в объеме жидкости). Слишком малый датчик находится в области сильных эффектов продольной диффузии вблизи кромок. Пространственная диффузия может вообще подавить влияние конвекции, являющейся исследуемым эффектом.

Для датчиков обыкновенной формы (круг или прямоугольник с короткой стороной в направлении течения) влияние продольной диффузии является самым сильным вблизи задней кромки датчика¹⁻⁵, т.е. вблизи той части его границы, над которой жидкость вытекает из области датчика. Эффекты продольной диффузии в области передней кромки оказываются^{4,6} пренебрежимыми, и сверх того, компенсированы другими вторичными эффектами^{1,2,7}. Эффект продольной диффузии в боковых кромках, направленных параллельно течению жидкости, до сих пор не был исследован, судя по содержанию недавнего обширного обзорного реферата³. Следовательно, главным источником количественной информации^{2,3} относительно эффектов продольной диффузии, существенных при масштабировании микродатчиков, до настоящего времени остается работа Линга⁴.

Коррекция на продольную диффузию может для работоспособных микро-датчиков трения достигнуть и 20% полного сигнала и, следовательно, является существенной при количественной обработке данных. В предлагаемой работе задача Линга решена в новой постановке, результаты Линга уточнены и обобщены на более широкий класс кинематических конфигураций датчиков трения.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предметом исследования у Линга⁴ и также в настоящей работе является установившаяся конвективная диффузия между жидкостью и неограниченным полосовым электродом шириной h установленным заподлицо с плоской изолирующей стенкой, $z = 0$. Поле скорости полностью определено постоянной скоростью сдвига γ , $v_x = \gamma z$, $v_y = v_z = 0$. Жидкость содержит деполаризатор, концентрация которого в ядре потока постоянна, $c = c_0$, и который транспортирован к поверхности электрода, где за счет действия быстрой необратимой электродной реакции концентрация почти нулевая, $c = 0$.

Исследуемый процесс описывается уравнением установившейся конвективной диффузии деполаризатора,

$$9z\partial_x c = \lambda^2(\partial_{zz}^2 c + \partial_{xx}^2 c), \quad (1)$$

где параметр

$$\lambda = (9D/\gamma)^{1/2} \quad (2)$$

введен в качестве масштаба длины для переходных областей вблизи кромок датчика. Краевые условия определяются на поверхности идеально поляризуемого электрода

$$c = 0 \quad \text{для} \quad z = 0 \quad \text{и} \quad 0 < x < h, \quad (3)$$

на поверхности идеально изолируемой стенки в окрестности электрода

$$\partial_z c = 0 \quad \text{для} \quad z = 0 \quad \text{и} \quad x < 0 \quad \text{или} \quad h < x, \quad (4)$$

и в ядре жидкости, обтекающей электрод

$$c \rightarrow c_0 \quad \text{для} \quad z^2 + (x/h)^2 \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Вполне аналогичной является соответствующая термоанемометрическая задача о транспорте тепла к полосовому датчику с постоянной температурой, отличающейся от температуры в ядре набегающего потока.

Данную задачу можно привести к нормированному виду напр. следующим преобразованием:

$$C(Z, X) = c(z, x)/c_0, \quad Z = z/\lambda, \quad X = x/\lambda. \quad (6)$$

Единственным варьируемым параметром нормированной постановки,

$$9Z\partial_x C = \partial_{ZZ}^2 C + \partial_{XX}^2 C \quad (7)$$

с краевыми условиями

$$C = 0 \quad \text{для } Z = 0 \quad \text{и} \quad 0 < X < B, \quad (8)$$

$$\partial_Z C = 0 \quad \text{для } Z = 0 \quad \text{и} \quad (X < 0 \quad \text{или} \quad B < X), \quad (9a, b)$$

$$C \rightarrow 1 \quad \text{для} \quad Z^2 + (X/B)^2 \rightarrow \infty, \quad (10)$$

остается безразмерная длина электрода

$$B = h/\lambda, \quad (11)$$

которую, однако, общепринято представлять соответствующим значением числа Пекле,

$$Pe = \gamma h^2/D = 9B^2. \quad (12)$$

Решением приведенной задачи можно считать поле концентраций на полной области определения. Практический интерес представляют прежде всего два функционала этого поля, профиль толщины диффузионного слоя

$$\delta(x) \equiv c_0/\partial_z c|_{z=0} = \lambda/\partial_Z C|_{Z=0} \quad (13)$$

и нормированный коэффициент тепло-массообмена,

$$Sh = \frac{Qh}{Dc_0A} = \int_0^h \frac{dx}{\delta(x)} = \int_0^B \partial_Z C|_{Z=0} dX. \quad (14)$$

В пренебрежении продольной диффузией, т.е. членом $\partial_{XX}^2 C$, уравнение (7) эллиптического типа превращается в параболическое уравнение

$$9Z\partial_x C = \partial_{ZZ}^2 C. \quad (15)$$

Упрощение уравнения (7) к „погранслойному“ виду (15) является принципиальным изменением природы исследуемой краевой задачи, прежде всего с точки зрения геометрической структуры граничных условий. Некоторыми из условий (8), (9a,b), (10) можно и необходимо пренебречь. Известно несколько погранслойных решений, т.е. частных интегралов уравнения (15), для отдельных областей жидкости.

Тривиальное решение $C(Z, X) = 1$ можно считать интегралом уравнения (15) на области $X < 0$, удовлетворяющим граничным условиям (9a), (10), и началь-

ному условию $C = 1$ в любой входной линии $X = X_0$, $X_0 < 0$. Тривиальное решение удовлетворяет также полному эллиптическому уравнению (7). Однако, на любой области $X < X_1$, где $X_1 < 0$, оно в противоречии с основным условием (8).

*Погранслойное решение C_L для диффузионного слоя*⁸, т.е. для области непосредственно над электродом, $0 < X < B$, удовлетворяет начальному условию $C = 1$ над передней кромкой электрода, $X = 0$, $Z > 0$, и граничным условиям (8), (10):

$$C_L(Z, X) = \frac{1}{\Gamma(4/3)} \int_0^{ZX^{-1/3}} \exp(-s^3) ds, \quad (16)$$

т.е.

$$\delta(x) \approx \delta_L(x) = \Gamma(4/3) (\lambda^2 x)^{1/3} \quad (17)$$

$$Sh \approx Sh_L = \frac{3^{1/3}}{2 \Gamma(4/3)} Pe^{1/3}. \quad (18)$$

Из-за пренебрежения продольной диффузией функция $C_L(Z, X)$ удовлетворяет полному транспортному уравнению (7) в пределах ошибок порядка $O(X^{-4/3})$, т.е. оно представляет регулярную асимптоту точного решения для $1 \ll X \ll B$. Вблизи передней и задней кромок оно неприменимо из-за несоответствия его структуры граничным условиям (9a,b).

Погранслойное решение C_N для ближнего диффузионного следа приведено, напр., Смерлом и Ньюменом⁵. Вообще, возможно искать решение параболической задачи с начальными условиями над задней кромкой электрода, $X = B$, выражающими гладкий переход диффузионного слоя в диффузионный след, $C = C_L(Z, B)$. Эта задача для „полного“ диффузионного следа неавтомодельна и ее решение до сих пор не исследовалось. На много проще задача для „ближнего“ диффузионного следа, органиченного непосредственной близостью задней кромки, $B < X \ll 2B$ и изолированной поверхности, $Z \ll b$, где

$$b \equiv \delta_L(b)/\lambda = \Gamma(4/3) B^{1/3} \quad (19)$$

безразмерная толщина диффузионного слоя вблизи задней кромки в погранслойном приближении. Органичиваясь вышеупомянутой асимптотикой, входной профиль концентраций можно считать линейным,

$$C = b^{-1}Z; \quad \text{для } X = B \text{ и } 1 \ll Z \ll B^{1/3}. \quad (20)$$

Интеграл параболического уравнения (15) с условиями (9b) и (20) известен

в явном виде⁶:

$$C_N(Z, X) = b^{-1}(X - B)^{1/3} F_1[Z(X - B)^{-1/3}], \quad (21)$$

где

$$F_1[\zeta] = \left\{ \exp(-\zeta^3) + \zeta \int_0^\zeta \exp(-s^3) 3s ds \right\} / \Gamma(2/3). \quad (22)$$

Из-за пренебрежения продольной диффузией функция $C_N(Z, X)$ удовлетворяет уравнению (7) в границах ошибок порядка $O((X - B)^{-4/3})$.

Погранслоиное решение для линейного источника приведено, напр., Лингом⁴. Несложно проверить, что функция

$$C_S(Z, X) = 1 - \frac{1}{2 \Gamma(4/3)} (X/B)^{-2/3} \exp[-(Z/\Gamma(4/3))^3 X^{-1}] \quad (23)$$

является решением параболического уравнения (15) и удовлетворяет граничным условиям (9b), (10). Кроме того, поле C_S удовлетворяет для любого $X > B$ полному балансу вещества в погранслоином приближении. Однако, это решение может представлять реальное приближение поля концентраций на достаточном удалении от задней кромки, $X \gg B$.

Локальное эллиптическое решение в области задней кромки. Между диффузионным слоем и диффузионным следом всегда существует переходная область с центром в задней кромке $(Z, X) = (0, B)$, на которой продольной диффузией нельзя пренебречь. Для $Pe \rightarrow \infty$ масштаб этой области, T_q , можно оценить ее радиусом ϱ , $Z^2 + (X - B)^2 < \varrho^2$, значение которого по численным расчетам^{4,5} порядка единицы. Решение эллиптического уравнения (7) на области T_q представляет главный интерес настоящей работы, поскольку оно дает количественную оценку вклада продольной диффузии в диффузионный ток, вычисленный в рамках погранслоиного приближения по формуле (18).

Чтобы устранить несущественные параметры из постановки локальной эллиптической задачи в задней кромке, целесообразно ввести новую искомую функцию

$$C^*(Z, X) = bC(Z, X + B); \quad (Z, X) \in T_q, \quad (24)$$

где T_q — область определения функции C^* ,

$$(Z, X) \in T_q \Leftrightarrow Z^2 + X^2 < \varrho^2. \quad (25)$$

Если символами T_q^- и T_q^+ обозначить те части границы области T_q , которые

находятся в контакте с диффузионным слоем (T_0^-) и с близким диффузионным следом (T_0^+), то граничные условия для C^* можно выразить в следующем виде:

$$C^* = 0; \text{ для } Z = 0 \text{ и } -\varrho < X < 0 \quad (26)$$

$$C^* = Z; \text{ для } (Z, X) \in T_0^- \quad (27)$$

$$\partial_Z C^* = 0; \text{ для } Z = 0 \text{ и } 0 < X < \varrho \quad (28)$$

и

$$C^* = X^{1/3} F_1 [ZX^{-1/3}]; \text{ для } (Z, X) \in T_0^+ \quad (29)$$

Подходящий радиус ϱ области, вне которой эффекты продольной диффузии пренебрежимы в пределах заданной ошибки, следует определить в ходе численного решения эллиптического уравнения

$$9Z\partial_X C^* = \partial_{ZZ}^2 C^* + \partial_{XX}^2 C^* \quad (30)$$

с граничными условиями (26)–(29). Вопрос определения величины ϱ связан только с проблемами численного решения задачи. С аналитической точки зрения можно ϱ считать бесконечно большим, $\varrho \rightarrow \infty$.

Несложно увидеть, что поправку для среднего коэффициента тепло-массообмена на эффект продольной диффузии в переходной области задней кромки можно выразить в следующем виде

$$\text{Sh} - \text{Sh}_L = \int_{B-\varrho}^B (\partial_Z C|_{Z=0} - \partial_Z C_L|_{Z=0}) dX = \psi_b b^{-1}, \quad (31)$$

где

$$\psi_b = \int_{-\infty}^0 (\partial_Z C^*|_{Z=0} - 1) dX. \quad (32)$$

Коэффициент ψ_b можно считать универсальной численной постоянной в виду того, что постановка (26)–(30) не зависит от Pe . Определение численного значения ψ_b является главной целью решения задачи.

КОНФОРМНАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ, ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Известно^{4,5}, что локальная эллиптическая задача по ур. (26)–(30) имеет особенность в точке $(X = 0, Z = 0)$, в которой становится значение градиента концентрации бесконечным. Это может существенно понизить точность полученного численного решения. Устранения этой особенности, т.е. регуляризации

задачи, можно достигнуть введением новых переменных (η, ξ) в рамках конформного преобразования типа $(\xi + i\eta)^2 = 2(-X + iZ)$. В частности, преобразование

$$\xi^2 - \eta^2 = -2X, \quad \xi\eta = Z, \quad (33)$$

т.е.

$$\xi = (-X + r/2)^{1/2}, \quad \eta = (X + r/2)^{1/2}, \quad (34)$$

где

$$r = \xi^2 + \eta^2 = 2(X^2 + Z^2)^{1/2}, \quad (35)$$

отображает линию поверхности электрода на полупрямую $(\eta = 0, \xi > 0)$ и линию изолированной поверхности на полупрямую $(\eta > 0, \xi = 0)$, смотри Рис. 1а, б. Для преобразованного поля

$$\Theta(\eta, \xi) = C^*(Z, X) \quad (36)$$

линия постоянной концентрации,

$$\Theta = 0; \quad \text{для } \eta = 0, \quad 0 \leq \xi \leq \sqrt{2}\rho \quad (37)$$

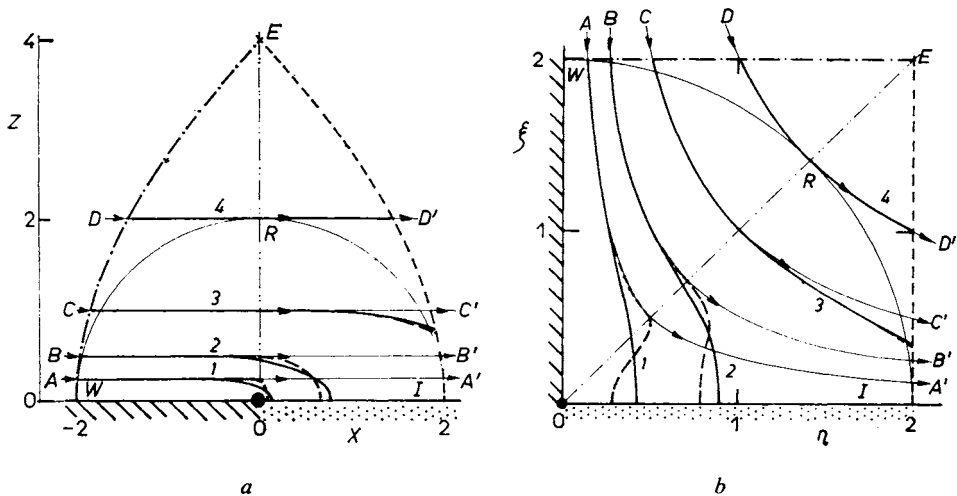


Рис. 1

Область определения поля концентраций. а В декартовых координатах, б в конформном отображении. 0 Задняя кромка; W поверхность датчика; I изолирующая поверхность; R точка над задней кромкой; AA'—DD' линии тока; линии постоянных концентраций C^* в пограничном приближении (прерывистые) и по численном решении (сплошные линии) 1 $C^* = 0.25$; 2 $C^* = 0.50$; 3 $C^* = 0.71$; 4 $C^* = 1.00$

и линия нулевого градиента,

$$\partial_{\eta}\Theta = 0; \text{ для } \xi = 0, \quad 0 \leq \eta \leq \sqrt{2\varrho} \quad (38)$$

взаимно перпендикулярны. В результате, условия (37), (38) совместны в общей точке обеих линий, $(\eta, \xi) = (0, 0)$. Согласно преобразованию (33) и уравнениям (27), (29), (30), поле $\Theta(\eta, \xi)$ должно удовлетворить следующим условиям над поверхностью электрода

$$\Theta = \eta\xi \text{ для } \eta < \xi \text{ и } \xi^2 + \eta^2 = 2\varrho, \quad (39)$$

над изолирующей поверхностью

$$\begin{aligned} \Theta &= X^{1/3}(\eta, \xi) F_1[Z(\eta, \xi) X^{-1/3}(\eta, \xi)] \\ &\text{для } \eta > \xi \text{ и } \xi^2 + \eta^2 = 2\varrho, \end{aligned} \quad (40)$$

и транспортному уравнению

$$9\eta\xi(\eta\partial_{\eta}\Theta - \xi\partial_{\xi}\Theta) = \partial_{\eta\eta}^2\Theta + \partial_{\xi\xi}^2\Theta. \quad (41)$$

Определяющее уравнение (32) для константы ψ_b в случае $\varrho \rightarrow \infty$ сводится к выражению

$$\psi_b = \int_0^{\infty} (\partial_{\eta}\Theta|_{\eta=0} - \xi) d\xi. \quad (42)$$

Краевая задача эллиптического типа, определенная системой уравнений (36)–(42), была решена численно, методом сеток, в рамках следующего дискретного представления поля концентраций на прямоугольнике $(0; \eta_{M+1}) \times (0; \xi_{N+2})$, $M \geq N$,

$$\Theta_{i,j} = \Theta(\eta_i, \xi_j) \quad (43)$$

$$\eta_i = \alpha(i - 1); \quad i = 1, \dots, M + 1 \quad (44a)$$

$$\xi_j = \alpha(j - 2); \quad j = 1, \dots, N + 2 \quad (44b)$$

$$\alpha = \sqrt{2\varrho/N}, \quad (45)$$

где колонка $j = 1$ использована как зеркальная симметрия в соответствии с условием (38), $\Theta_{i,1} = \Theta_{i,3}$. При выборе $M > N$ учитываемая область расчета включает в себя квадрант $r \leq \sqrt{2\varrho}$. Расчеты основаны на обыкновенном дискретном представлении дифференциального уравнения (41) посредством

центральных разностей для внутренних точек (η_i, ξ_j) прямоугольника, $i = 2, \dots, M$; $j = 2, \dots, N + 1$:

$$\begin{aligned} \Theta_{i,j} = & \frac{1}{4}(\Theta_{i+1,j} + \Theta_{i-1,j} + \Theta_{i,j+1} + \Theta_{i,j-1}) - \\ & - \frac{2}{3}\alpha\eta_i\xi_j(\eta_i(\Theta_{i+1,j} - \Theta_{i-1,j}) - \xi_j(\Theta_{i,j+1} - \Theta_{i,j-1})). \end{aligned} \quad (46)$$

Значения $\Theta_{i,j}$ в граничной строчке $i = 1$ даны условием (38), в граничных линиях $i = M + 1$ и $j = N + 2$ вычисляются согласно условиям (39), (40). Те же выражения использованы для введения входной оценки всех элементов $\Theta_{i,j}$ внутри рассматриваемого прямоугольника. Система уравнений (46) решена обыкновенным релаксационным методом. Итеративные расчеты окончены после стабилизации значений всех элементов на пять значащих цифр.

Градиенты концентрации на поверхности электрода вычислялись по значениям $\Theta_{i,j}$ в двух

$$\partial_{\eta}\Theta|_{\eta=0} = \Theta_{2,j}/\alpha \quad (47a)$$

или трех

$$\partial_{\eta}\Theta|_{\eta=0} = (4\Theta_{2,j} - \Theta_{3,j})/(2\alpha) \quad (47b)$$

точках вблизи стенки. Соответствующее значение интеграла (42) определялось по формуле Симпсона.

Адекватность выбора области определения, т.е. размеров прямоугольника $(0; \eta_{M+1}) \times (0; \xi_{N+2})$, проверялась путем сравнения входных погранслойных оценок внутренних элементов $\Theta_{i,j}$ вне радиуса 2ϱ с их значениями после окончания итераций. Отклонения, не превышающие значение 10^{-5} , считались доказательством, что окружность $\xi^2 + \eta^2 = 2\varrho$ лежит вне переходной области с влиянием продольной диффузии. Масштаб переходной области над поверхностью электрода охарактеризован на Рис. 2 продольным профилем пристенного градиента концентраций, масштаб переходной области над изолированной поверхностью охарактеризован на Рис. 3 продольными профилями концентраций.

Точность расчетов проверялась повторением решения задачи с половинной длиной шага α . Типичные результаты вычислений программированных на языке FORTRAN IV приведены в таблице I. Видно, что $\varrho \approx 2$ и $\alpha \approx 0.05$ достаточны для определения значений $\Theta_{i,j}$ с точностью до четырех знаков и константы ψ_b — до трех знаков:

$$\psi_b = 0.230 \pm 0.001. \quad (48)$$

ДИСКУССИЯ, ВЫВОДЫ

Для исследуемого частного типа датчика в виде поперечно обтекаемого бесконечного полосового электрода применение определений (18), (19) и (31)

Таблица I

Объем и точность численных расчетов

Число итераций	η_{M+1}	ξ_{N+1}	α	ψ_b	$10^4 \varepsilon^a$
320	2	2	0.025	0.2338	0.08
800	2	2	0.025	0.2315	0.01
1 200	2	2	0.025	0.2300	0.00
80	2	2	0.05	0.2378	1.40
160	2	2	0.05	0.2346	0.11
20	2	2	0.10	0.24	4.10
240	1.5	1.5	0.025	0.2309	0.19
240	1.0	1.5	0.025	0.2312	0.14
160	1.0	1.0	0.025	0.2216	0.41

^a Среднее отклонение значений $\theta_{1,j}$ в последней и предпоследней итерациях.

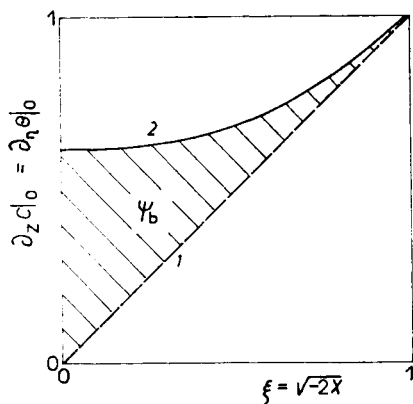


Рис. 2

Продольный профиль пристенного градиента концентраций в диффузионном слое. 1 Погранслоное приближение; 2 точное решение

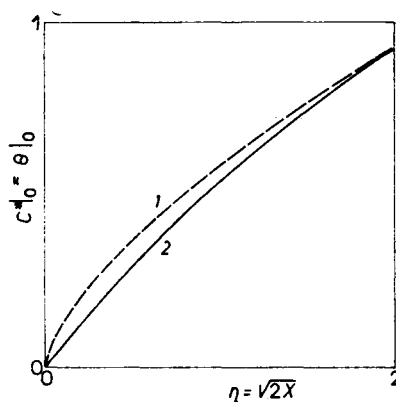


Рис. 3

Продольный профиль пристенной концентрации в диффузионном слое. 1 Погранслоное решение; 2 точное решение

приводит к следующему выражению для коэффициента тепло-массообмена

$$\text{Sh} = \text{Sh}_L + \psi_b b^{-1} = \text{Pe}^{1/3}(0.8075 + 0.37 \text{Pe}^{-1/2}). \quad (49)$$

Этот результат значительно отличается от результата приведенного Лингом⁴, $\text{Sh} = \text{Pe}^{1/3}(0.807 + 0.19 \text{Pe}^{-1/2})$, коэффициентом поправки на эффект продольной диффузии. Выяснить причину ошибки, появившейся в результатах Линга, довольно сложно, поскольку в его оригинальной работе⁴ не приведена количественная информация, характеризующая постановку задачи (краевые условия) и детальные результаты (профиль пристенного градиента).

Наше мнение относительно корректности результатов по ур. (48), (49) основано не только на проведенном анализе и проверках точности расчетов, а также на неплохом согласии наших результатов с результатами Смерла и Ньюмена⁵, полученными для другой, равнодоступной конфигурации датчика.

Во введении работы⁵ можно найти замечание, что результаты решения исследуемой локальной эллиптической задачи, которая идентична нашей, применимы для оценки влияния продольной диффузии в области задней кромки для любой электродной конфигурации. Следующие выводы покажут простую явную реализацию такой оценки.

Оценка основана на предположении, что учитываемая задача конвективной диффузии может быть в первом приближении исследована в рамках приближений теории концентрационного погранслоя. Прямолинейные профили скорости могут в этом случае быть охарактеризованы компонентами $\gamma_1(x_1, x_2)$, $\gamma_2(x_1, x_2)$ скорости сдвига на поверхности электрода, смотри Рис. 4. Соответствующее решение уравнения конвективной диффузии методом Лайтхилла-Акривоса дает определение локальных толщин диффузионного слоя, $\delta = \delta_L(x_1, x_2)$. В частности, на линии P задней кромки известны поля $\delta_L(x_1, x_2)$ и $\gamma_n(x_1, x_2)$, где $\gamma_n > 0$ — проекция вектора (γ_1, γ_2) поперечно к линии P задней кромки.

Поскольку эффект продольной диффузии ограничен на тонкую полосу шириной λ_n ,

$$\lambda_n(x_1, x_2) = \sqrt{[9D/\gamma_n(x_1, x_2)]}, \quad (50)$$

можно для оценки разницы $(\partial_z c|_{z=0} - \partial_z c_L|_{z=0})$ пользоваться подходом, введенным для случая полосового электрода с тем отличием, что приращение ΔQ диффузионного тока из-за эффекта продольной диффузии следует относить к единице длины границы в задней кромке:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta P} = \int_{-e\lambda_n}^0 D(\partial_z c|_{z=0} - \partial_z c_L|_{z=0}) dx = \psi_b D c_0 / b_n, \quad (51)$$

где

$$b_n(x_1, x_2) = \delta_L(x_1, x_2) / \lambda_n(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in P. \quad (52)$$

Теперь несложно видеть, что для электрода с поверхностью $(x_1, x_2) \in A$ и границей задней кромки $(x_1, x_2) \in P$, коррекция на продольную диффузию состоит в учете кромочного эффекта⁹:

$$\begin{aligned} \text{Sh} &= \frac{QL}{c_0 DA} = \frac{L}{Ac_0 D} \left\{ \iint_A \frac{dQ}{dA} dA + \int_P \frac{dQ}{dP} dP \right\} = \\ &= \frac{L}{\delta_L} + \psi_b \frac{L}{A} \int_P \frac{dP(x_1, x_2)}{b_n(x_1, x_2)}, \end{aligned} \quad (53)$$

где

$$\frac{1}{\delta_L} \equiv \frac{1}{A} \iint_A \frac{dA(x_1, x_2)}{\delta_L(x_1, x_2)}, \quad (54)$$

а L – некоторый подходящий масштаб длины датчика в направлении течения

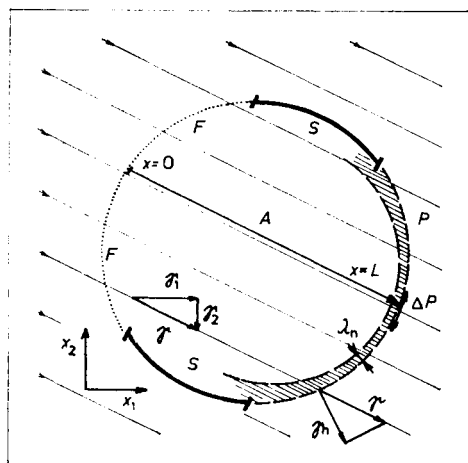


Рис. 4

Общая схема датчика трения. A поверхность электрода; F передняя кромка; S боковые кромки; P задняя кромка; ΔP элемент длины задней кромки; x координата в направлении течения; L характеристическая локальная длина; тонкие прямые параллельны направлениям течения

В частном случае⁵ равнодоступного осесимметричного электрода радиуса r_0 с полем скорости $v_z = -A_0 y^2$, $v_r = A_0 r z$, известно, что толщина диффузионного слоя в погранслоном приближении постоянна, $\delta_L(r_0) = \delta_L = \Gamma(4/3) \cdot (3D/A_0)^{1/3}$ и радиальная скорость сдвига на кромке электрода равна $\gamma_n = A_0 r_0$. С учетом этих фактов явное представление формулы (53) в рассматриваемом случае имеет вид

$$\text{Sh} = (r_0/\delta_L)(1 + 6\psi_b(A_0 r_0/D)^{-1/2}), \quad (55)$$

что при $\psi_b = 0.23$ в полном согласии с уравнением (19) в работе⁵.

Для полноты следует напомнить аналитическое решение данной задачи¹⁰, результирующее в представлении продольного профиля градиента концентраций асимптотическим разложением для $X \rightarrow 0_-$. Численные значения интегральных токов, приведенные в работе¹⁰, сходятся для $\text{Pe} > 20$ с результатами по ур. (49), если положить $\psi_b = 0.235$, что на 2% выше правильного значения 0.230.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

A	поверхность и площадь датчика
$B = \text{Pe}^{1/2}/3$	
$b = \delta_L/\lambda$	единственный параметр локальной постановки задачи
$b_n = \delta_L/\lambda_n$	обобщенный параметр b для трехмерного случая
c	концентрация деполаризатора
c_0	значение c в массе жидкости
C	нормированное поле концентраций
C_L	погранслоное приближение C для диффузионного слоя
C_N	приближение C для следа
C_S	приближение C для точечного источника
C^*	локальная нормировка C для задней кромки
D	коэффициент диффузии
h	ширина полосового датчика
L	длина датчика в направлении течения
P	геометрическое место и длина задней кромки
Pe	число Пекле
Q	полный диффузионный поток к датчику
r	метрический коэффициент конформного преобразования
Sh	число Шервуда, ур.(14)
$T_\rho, T_\rho^+, T_\rho^-$	область определения C^* и ее границы
v_x	продольная компонента скорости
x	продольная координата
x_1, x_2	координаты на поверхности датчика
z	поперечная координата
X	нормированная x -координата
Z	нормированная z -координата

α	шаг сетки
γ	скорость сдвига
γ_n	проекция скорости сдвига по нормали к задней кромке
γ_1, γ_2	компоненты скорости сдвига
δ	толщина диффузионного слоя
δ_L	погранслоевая оценка δ
$\bar{\delta}_L$	среднее значение δ_L на поверхности датчика
$\Theta(\eta, \xi)$	конформное преобразование поля концентраций C^*
λ	характеристическая ширина переходной области у задней кромки
λ_n	обобщение λ для трехмерного случая
ρ	радиус переходной области
ψ_b	основная константа решения

ЛИТЕРАТУРА

1. Накоряков В. Е. в книге: *Исследование турбулентных течений двухфазных сред* (под редакцией С. С. Кутателадзе). Институт теплофизики, Новосибирск 1973.
2. Нигматуллин Р. Ш., Кадер Б. А., Крылов В. С., Соколов Л. А.: *Успехи химии* 44, 2008 (1975).
3. Hanratty T. J., Campbell J. A. in the book: *Fluid Mechanics Measurements* (R. J. Goldstein, Ed.), p. 261. Springer, Berlin 1983.
4. Ling S. C.: *Trans. ASME — J. Heat Transfer* 85C, 230 (1963).
5. Smyrl W. H., Newman J.: *J. Electrochem. Soc.* 118, 1079 (1971).
6. Homsy R. V., Newman J.: *AIChE J.* 19, 929 (1973).
7. Kader B. A., Gukhman A. T.: *5th Int. Heat Transfer Congr., Tokyo, September 1974; paper No MA2—1.*
8. Leveque M. A.: *Ann. Mines* 13, 283 (1928).
9. Oldham K. B.: *J. Electroanal. Chem.* 122, 1 (1981).
10. Springer S. G.: *Proc. R. Soc. London, A* 337, 395 (1974).

Перевод автор (О. В.).